竖向矩形锚板水平拉拔极限承载力统一计算方法研究

林志[1],胡伟[1],龙诚璧[1],陈洁[2],李裕恒[1],曾超峰[1]

(1. 湖南科技大学岩土工程稳定控制与健康监测湖南省重点实验室,411201 湘潭;
2. 仲恺农业工程学院城乡建设学院,510225 广州)

摘　要: 在已有竖向条形锚板和正方形锚板水平拉拔统一力学模型的基础上,进一步构建了矩形锚板的三维模型。以板前四棱楔形体土核在4个方向挤压土体所形成的空间滑移体来描述拉拔破坏面。分别对4块滑体进行力学平衡分析,求解作用于楔形体土核4个面上的土压力合力,再根据土核竖向极限平衡条件确定其形状,根据水平极限平衡条件推导极限承载力统一计算方法。与大尺寸锚板试验和其他计算方法的对比表明:本研究方法对锚板尺寸效应不敏感,对不同埋深无明显的倾向性;与实测值比值的变化范围较窄,靠近于1∶1线,计算精度和离散程度指标均优于其他3种方法,整体表现良好。

关键词: 竖向矩形锚板;水平拉拔;统一力学模型;极限承载力

中图分类号: TU431　　　**文献标志码:** A

Unified calculation method research on ultimate horizontal pullout capacity of vertical rectangle anchor

LIN Zhi[1], HU Wei[1], LONG Chengbi[1], CHEN Jie[2], LI Yuheng[1], ZENG Chaofeng[1]

(1. Hunan Province Key Laboratory of Geotechnical Engineering for Stability Control and Health Monitoring, Hunan University of Science and Technology, 411201 Xiangtan, China;
2. College of Urban and Rural Construction, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, 510225 Guangzhou, China)

Abstract: A three-dimensional model of rectangular anchor plate was further constructed on the base of the existing unified mechanical models of horizontal drawing of vertical strip plate and square anchor plate. The spatial slip body was used to describe the drawing failure surface, which was formed by the wedge-shaped soil core in front of the plate squeezing the soil in four directions. A mechanical equilibrium analysis was carried out on the four parts of spatial slip body separately to calculate the resultant soil pressure acting on the four faces of the soil core. The shape of the soil core was determined in accordance with its vertical limit equilibrium conditions and the unified calculation method of the ultimate pullout capacity was then deduced from the horizontal limit equilibrium conditions. Comparison with the large-size anchor plate

收稿日期: 2020-11-04　　　**修回日期:** 2022-02-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 51708206;No. 51978261);湖南省自然科学基金资助项目(No. 2020JJ4300);湖南省教育厅优秀青年项目资助(No. 18B203);广东省普通高校特色创新资助项目(No. 2019KTSCX066)

通信作者: 胡伟,教授。E-mail:yilukuangben1982@163.com

引用格式: 林志,胡伟,龙诚璧,等. 竖向矩形锚板水平拉拔极限承载力统一计算方法研究[J]. 应用力学学报,2022,39(3):562-571.
LIN Zhi, HU Wei, LONG Chengbi, et al. Unified calculation method research on ultimate horizontal pullout capacity of vertical rectangle anchor [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(3):562-571.

tests and other calculation methods showed that the method in this paper was insensitive to size effect of anchor plate and had no obvious tendency to different buried depth. Moreover, the variation range of the ratio of the calculated bearing capacity to the measured value, which was close to the 1∶1 line, was narrow. The calculation accuracy and dispersion degree indexes were superior to those of the other three methods, and had overall good performance.

Key words: vertical rectangular anchor; horizontal drawing; unified mechanics model; ultimate pullout capacity

竖向锚板是锚定板挡土墙工程中的关键受力构件，依靠其提供的水平抗拔承载力来平衡作用于面板上的土压力，从而保持填土体的稳定性[1-2]。工程实践中，竖向锚板一般为矩形，长宽比小于5，并以正方形居多[3-4]，具有典型的三维特征。对此类锚板抗拔承载力的理论研究，以往通常在条形锚板平面应变问题的基础上引入形状系数来考虑矩形板的三维效应[5-6]，直接开展三维理论分析的研究还少有报道。文献[7]认为当前锚板拉拔问题研究中先界定浅埋、深埋，再采用固定的对称或非对称形式的破坏面来构建两类力学模型的思路，不符合滑动面连续演化的特征，且临界埋深比的取值没有统一标准。为此，研究构建了可反映板前土体滑动面对称性随埋深比连续演化的条形板极限拉拔统一力学模型。文献[7]在此基础上分析了竖向正方形锚板在竖向和水平向破坏机制的异同，进一步建立了正方形锚板极限拉拔的三维力学模型，推导了极限拉拔承载力统一计算方法。上述研究深化了对锚板拉拔破坏机制的理论阐释，所推导的承载力计算方法也具有较好的适应性，表明该研究思路具有合理性。

本研究将在上述研究成果的基础上，将一个力学模型统一浅埋、深埋的研究思路进一步扩展到一般矩形锚板，尝试构建任意长宽比矩形锚板的三维统一力学模型，并研究推导相应的水平拉拔极限承载力计算方法，以期为竖向锚板水平拉拔承载力的计算提供更具广泛适用性的方法。

1 矩形锚板三维统一力学模型

竖向矩形锚板（平面尺寸 $l\times h$，埋深 H）水平拉拔达到极限状态的过程描述如下：锚板受拉发生位移，板前土体被挤压；随着挤压的发展，在板前将逐渐形成一个以矩形板为底面、顶部为一直线段的四棱楔形体土核 $ABCDIJ$，该直线段的方向平行于锚板长度方向，长度则小于板长 l，如图1所示。

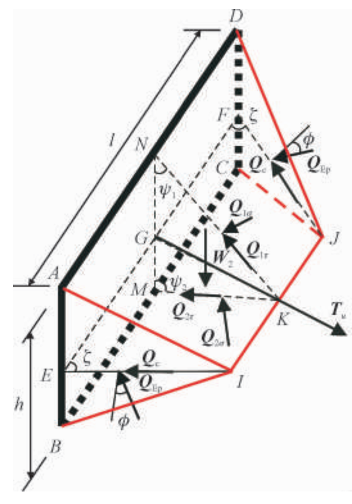


图1　板前四棱锥土核

Fig. 1　Rectangular pyramid soil core before plate

土核随着锚板一起运动并挤压周围土体持续发生位移变形，其中 $ADIJ$ 面和 $BCIJ$ 面分别向上和向下挤压，ABI 面和 CDJ 面则分别在两侧方向挤压，最终在三维空间内形成破坏滑动面，锚板达到其极限承载力。土核两个侧面 ABI、CDJ 与底面所成角度均为 ζ。该角度值大小取决于楔形体的高度和顶边直线段 IJ 的长度，但小于 $\pi/2$。ϕ 为土体内摩擦角，上下两个面与锚板平面的夹角分别为 ψ_1、ψ_2，即土核在竖向对称面内投影 $\triangle KMN$ 的两个底角。$\triangle KMN$ 将随着埋深比的变化，由浅埋时的近似直角三角形连续演化至深埋时的对称三角形，从而控制土核的形状。按照文献[8]中的分析，两个底角 ψ_1、ψ_2 满足如下关系。

$$\begin{cases}\phi\leqslant\psi_1\leqslant\pi/4+\phi/2\\ \pi/2\geqslant\psi_2\geqslant\pi/4+\phi/2\\ \psi_1+\psi_2=\pi/2+\phi\end{cases}\qquad(1)$$

四棱楔形体受到极限水平拉力 $\boldsymbol{T}_u$，土核自身重力 $\boldsymbol{W}_2$，4个侧面上的土压力合力，包括 $ADIJ$ 面上的法向应力合力 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$、切向应力合力 $\boldsymbol{Q}_{1\tau}$，$BCJI$ 面上的法向应力合力 $\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$、切向应力合力 $\boldsymbol{Q}_{2\tau}$，ABI 和 CDJ 两个面上的土压力合力 $\boldsymbol{Q}_{Ep}$、黏聚力合力 $\boldsymbol{Q}_c$，共10

个力的共同作用。不考虑锚板顶面所在平面以上土体的抗剪强度，而将其作用等效为均布荷载 q；忽略锚板在其对角线方向排开土体对承载力的贡献[9]，构建最终拉拔破坏时矩形锚板板前土体形成的三维滑动体如图 2 所示。

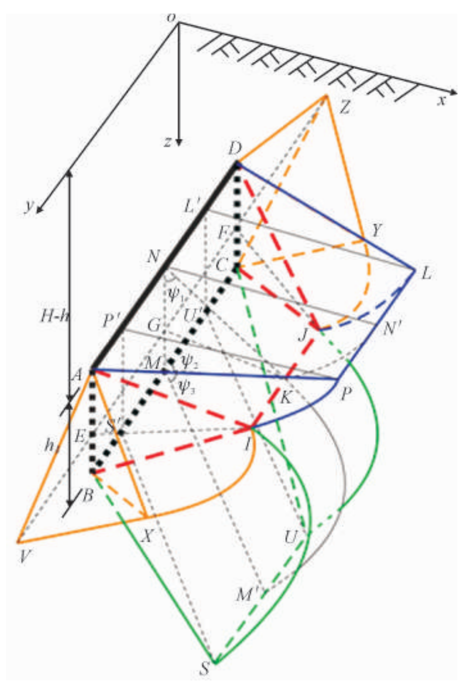


图 2　板前三维滑动体

Fig. 2　Three-dimensional sliding body before plate

三维滑动体分别为 $ADIJLP$ 滑块、$BCIJSU$ 滑块、$ABIXV$ 滑块和 $CDJYZ$ 滑块。滑动体边界线 $\hat{IP}$、$\hat{JL}$、$\hat{IS}$、$\hat{JU}$、$\hat{IX}$、$\hat{JY}$ 为对数螺旋线，故 $IJLP$ 面是由极点为 P'，初始极径为 IP' 的对数螺旋线 $\hat{IP}$ 沿 y 方向平移 $l-h$ 至 $\hat{JL}$ 处所形成的曲面；$IJSU$ 面是由极点为 S'，初始极径为 IS' 的对数螺旋线 $\hat{IS}$ 沿 y 方向平移 $l-h$ 至 $\hat{JU}$ 处所形成的曲面。$BCIJSU$ 滑块 $BCSU$ 面的位置由该面与竖直面所成角度 $\angle NMM'$ 确定。试验测试结果表明：该角度随埋深比增大而发生变化，介于 $\pi/2 \sim (\pi/4+\phi/2)+\pi/2$ 之间[8]。$\psi_3=\angle KMM'$ 按线性内插法根据式(1)中 ψ_2 的变化规律计算，即

$$\psi_3=-\frac{\pi(2\psi_2-\pi)}{\pi-2\phi} \tag{2}$$

2　极限承载力计算公式推导

对三维力学模型进行极限平衡分析，建立水平方向力的平衡方程。要计算锚板的水平拉拔极限承载力，需求得楔形体土核 4 个侧面上土压力合力在水平方向的分量，包含 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{1\tau}$、$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{2\tau}$、$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ep}}$、$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}$、$\psi_1$、$\psi_2$、$\zeta$ 共 9 个未知量，其中 $\boldsymbol{Q}_{1\tau}$、$\boldsymbol{Q}_{2\tau}$、$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}$ 可分别由 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ep}}$ 依据莫尔-库伦强度理论进行计算。以下对 6 个独立未知量进行推导求解。

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{u}}-\boldsymbol{Q}_{1\sigma}\cos\psi_1-\boldsymbol{Q}_{1\tau}\sin\psi_1-\boldsymbol{Q}_{2\sigma}\cos\psi_2-\boldsymbol{Q}_{2\tau}\sin\psi_2-2\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ep}}\cos(\zeta-\phi)-2\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}\sin\zeta=0 \tag{3}$$

$$\zeta=\arctan(2|NK|\sin\psi_1/h) \tag{4}$$

2.1　$\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$ 推导

$ADIJLP$ 滑块受力分析如图 3 所示，共受到 10 个力的作用，分别为自身重力 $\boldsymbol{W}_1$；来自四棱楔形体土核 $ADIJ$ 面上与 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{1\tau}$ 分别对应的反作用力 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma'}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{1\tau'}$；$ADLP$ 面上等效作用的均布荷载 $q=\gamma(H-h)$，γ 为土体重度；API 面上作用的正应力合力 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 和切应力合力 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$；DJL 面相应的 $\boldsymbol{F}_{2\sigma}$ 和 $\boldsymbol{F}_{2\tau}$。根据模型特征，大小上 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}=\boldsymbol{F}_{2\sigma}$、$\boldsymbol{F}_{1\tau}=\boldsymbol{F}_{2\tau}$。$IJLP$ 面上法向应力和切向相应摩擦应力的合力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R1}}$、黏聚力合力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c1}}$。

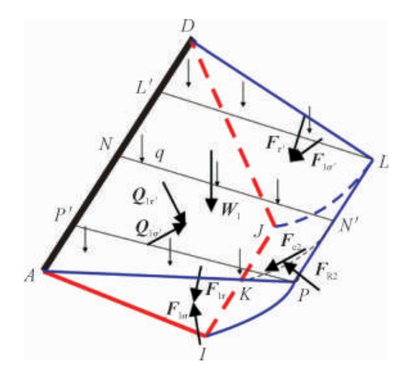


图 3　$ADIJLP$ 滑块受力分析

Fig. 3　Force analysis of $ADIJLP$

分别求各力对直线 AD 的力矩。如图 4 所示，采用积分法计算自身重力 $\boldsymbol{W}_1$ 产生的顺时针力矩 M_{W1}。螺旋线上 N'、K 对应的极径长度计算如下。

$$|NN'|=|NK|\mathrm{e}^{(\pi/2-\psi_1)\tan\phi} \tag{5}$$

$$|NK|=h\cos(\psi_1-\phi)/\cos\phi \tag{6}$$

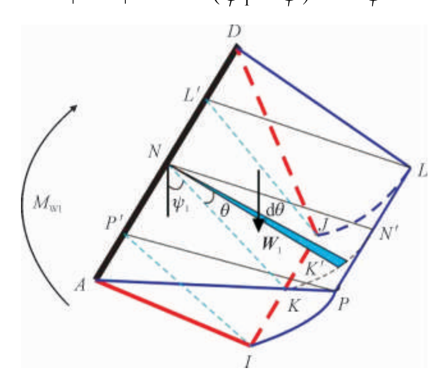


图 4　力矩 M_{W1}

Fig. 4　Moment of M_{W1}

将 $\mathrm{d}\theta$ 对应的微元重力分为 3 部分,分别为曲面棱柱 $IJPP'LL'$、大小相同的曲边体 $AIPP'$ 和 $DJLL'$ 中相应微元的重力。前者为高度 $l-h$、底面半径 $|NK'|$ 的圆柱体对应中心角 $\mathrm{d}\theta$ 的重力;后两者为高度 h,底面半径 $|NK'|$ 的圆锥体对应中心角 $\mathrm{d}\theta$ 的重力。微元重力对 AD 直线的力臂可分别由扇形重心和三角形重心计算方法来确定,则 M_{W1} 计算如下。

$$M_{W_1} = \gamma \int_0^{\pi/2-\psi_1} \left[\frac{1}{3}(l-h)\ |NK|^3 \mathrm{e}^{3\theta\tan\phi}\sin(\psi_1+\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{h}{18}\ |NK|^3\mathrm{e}^{3\theta\tan\phi}\sin(\psi_1+\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{3}l-\frac{5}{18}h\right)\gamma\ |NK|^3}{(3\tan\phi)^2+1}\left[3\tan\phi\ \mathrm{e}^{3(\pi/2-\psi_1)\tan\phi} - (3\tan\phi\sin\psi_1-\cos\psi_1)\right] \tag{7}$$

$ADLP$ 面上等效均布荷载 q 产生的顺时针力矩 M_q 可分为两部分,分别为矩形 $LL'PP'$ 上均布荷载产生的力矩 M_{q1},$\triangle DLL'$ 和 $\triangle APP'$ 上均布荷载产生的力矩 M_{q2}。力矩 M_q 的计算如图 5 所示。

$$M_q = M_{q1}+M_{q2}$$
$$=(l-h)|NN'|q\frac{|NN'|}{2}+h|NN'|q\frac{|NN'|}{6}$$
$$=\left(\frac{l}{2}-\frac{h}{3}\right)\gamma(H-h)|NK|^2\mathrm{e}^{(\pi-2\psi_1)\tan\phi} \tag{8}$$

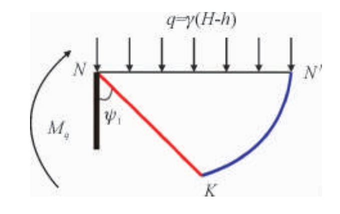


图 5　力矩 M_{q1}

Fig. 5　Moment of M_{q1}

曲面 $IJPL$ 上合力 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 的作用线过直线 AD,故其对直线 AD 的力矩为 0。黏聚力合力 $\boldsymbol{F}_{c1}$ 产生的顺时针力矩 M_{c1} 计算如图 6 所示,计算式为

$$M_{c1} = \int_0^{\pi/2-\psi_1} c(l-h)|NK|\mathrm{e}^{\theta\tan\phi}\mathrm{d}\theta \times |NK|\mathrm{e}^{\theta\tan\phi}\cos\phi$$
$$=\frac{c(l-h)\ |NK|^2\cos\phi}{2\tan\phi}\left[\mathrm{e}^{(\pi-2\psi_1)\tan\phi}-1\right] \tag{9}$$

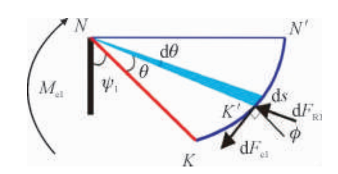


图 6　力矩 M_{c1}

Fig. 6　Moment of M_{c1}

$ADIJ$ 面上切应力合力 $\boldsymbol{Q}_{1\tau'}$ 作用线通过 AD 线,故其力矩为 0。法向应力合力 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma'}$ 的作用力计算如图 7 所示。$ADIJ$ 面上某点的正应力与该点的埋深成正比。在面内平行于 AD 线沿 NK 方向距离 AD 线 x 处,取宽度为 $\mathrm{d}x$ 的面积微元。假设其上法向应力 $\sigma=-K\gamma Z_x+\lambda c$,$K$、$\lambda$ 为设定的土压力系数,可通过表达式 $K'=K+\lambda c/\gamma Z_x$,将法向应力换算至 $\sigma=K'\gamma Z_x$ 的型式。Z_x 为该点的埋深,$Z_x=H-h+x\cos\psi_1$,x 满足 $0\leqslant x\leqslant|NK|$。设合力 $\boldsymbol{Q}_{1\sigma'}$ 对直线 AD 的力臂为 $L_{Q1\sigma}$,则法向应力合力逆时针力矩 $M_{Q1\sigma}=Q_{1\sigma'}L_{Q1\sigma}$ 表达为

$$M_{Q_{1\sigma}} = \int_0^{|NK|} K'\gamma(H-h+x\cos\psi_1)\left(l-\frac{hx}{|NK|}\right)x\mathrm{d}x$$
$$= L_{Q_{1\sigma}}\int_0^{|NK|} K'\gamma(H-h+x\cos\psi_1)\left(l-\frac{hx}{|NK|}\right)\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$L_{Q_{1\sigma}} = \frac{(l/2-h/3)(H-h)|NK|+(l/3-h/4)\cos\psi_1\ |NK|^2}{(l-h/2)(H-h)+(l/2-h/3)\cos\psi_1|NK|} \tag{11}$$

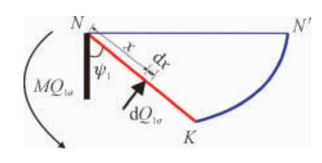


图 7　力矩 $M_{Q1\sigma}$

Fig. 7　Moment of $M_{Q1\sigma}$

曲面 API 和 DJL 上正应力合力 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$、$\boldsymbol{F}_{2\sigma}$ 和切应力合力 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$、$\boldsymbol{F}_{2\tau}$ 对 AD 线产生的力矩分别记为 $M_{F1\sigma}$ 和 $M_{F1\tau}$,如图 8 ~ 图 9 所示。

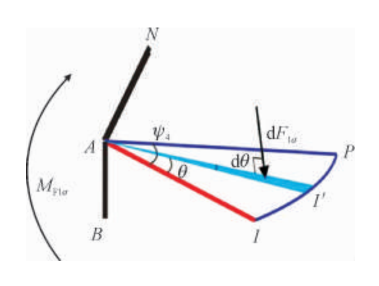


图 8　力矩 $M_{F1\sigma}$

Fig. 8　Moment of $M_{F1\sigma}$

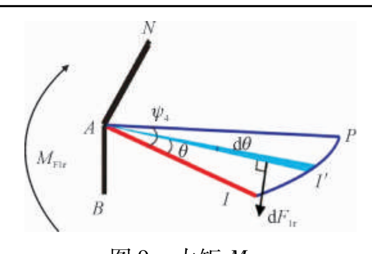


图 9　力矩 $M_{F1\tau}$

Fig. 9　Moment of $M_{F1\tau}$

力矩 $M_{F1\sigma}$ 和 $M_{F1\tau}$ 的推导步骤如下。

1）根据 A、I、P 这 3 点坐标求解 AIP 平面方程，计算其与 xOz 平面的夹角，推求平面上一点的法向应力表达式 σ。

2）在 θ 处取微元 $\mathrm{d}\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\psi_4$，结合螺旋线 IP 方程和微元面上法向应力分布 σ 进行二次积分，求出 AIP 面上法向应力合力 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$。

3）一次积分建立微元面上法向应力合力作用点距 A 点的距离表达式，线性插值将其表达为 θ 的一次函数后求解 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$、作用点 O 在平面内距 A 点的距离以及 $\angle IAO$ 的大小。

4）求解过合力作用点 O，且垂直于平面 AIP 的直线方程；计算该直线与 xOz 平面的夹角，以及矢量 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 在 xOz 平面内的投影长度；计算该直线在 $y=0$ 平面内的投影直线方程，求解 N 点到该直线的距离。

5）计算 $M_{F1\sigma}$ 并判断其方向。$M_{F1\tau}$ 的计算和上述步骤类似，以下给出主要推导结果。$\angle IAP$ 即 ψ_4 的计算式为

$$\psi_4=\arccos\frac{(h/2)^2+|NK||NN'|\sin\psi_1}{\sqrt{|NN'|^2+(h/2)^2}\sqrt{|NK|^2+(h/2)^2}} \tag{12}$$

$\hat{IP}$ 也是以 A 点为极点，AI 为初始极径的对数螺旋线，初始极径长度 $|AI|$ 和与 ψ_4 角对应点 P 的极径长度 $|AP|$ 分别为

$$|AI|=\sqrt{|NK|^2+(h/2)^2} \tag{13}$$

$$|AP|=|AI|\mathrm{e}^{a\psi_3\tan\phi}=\sqrt{|NN'|^2+(h/2)^2} \tag{14}$$

$$a=\ln(|AP|^2/|AI|^2)/(2\psi_3\tan\phi) \tag{15}$$

平面 AIP 与 xOz 平面的夹角 ϕ_1 为

$$\cos\phi_1=\chi_1/\sqrt{1+\chi_1^2+\eta_1^2} \tag{16}$$

其中，χ_1、η_1 为 AIP 平面法向量在 y、z 方向的坐标值，且

$$\chi_1=\frac{2}{h}|NK|\mathrm{e}^{(\pi/2-\psi_1)\tan\phi} \tag{17}$$

$$\eta_1=\frac{\mathrm{e}^{(\pi/2-\psi_1)\tan\phi}-\sin\psi_1}{\cos\psi_1} \tag{18}$$

平面 AIP 上 θ 处微元上距地表距离为 Z_y 点的法向正应力 $\sigma_{\theta y}$ 为

$$\sigma_{\theta y}=\left[\frac{2\phi_1}{\pi}(K_\mathrm{P}-K_0)+K_0\right]\gamma Z_y+\frac{4\phi_1\sqrt{K_\mathrm{P}}}{\pi}c=K_1\gamma Z_y+\lambda_1 c \tag{19}$$

$$K_1=\frac{2\phi_1(K_\mathrm{P}-K_0)}{\pi}+K_0,\lambda_1=\frac{4\phi_1\sqrt{K_\mathrm{P}}}{\pi} \tag{20}$$

式中：K_p 为被动土压力系数，$K_\mathrm{p}=\tan^2(\pi/4+\phi/2)$；$K_0=1-\sin\phi$，为静止土压力系数。

$\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 以及 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 的作用点到 A 点的距离 $S_{\sigma A}$，$\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 的作用点与 A 点的连线在 AIP 平面内与 AI 直线的夹角 $\beta_{\sigma AI}$ 的计算式分别为

$$\boldsymbol{F}_{\sigma 1}=\int_0^{\psi_4}\int_0^{l_\theta}(K_1\gamma Z_y+\lambda_1 c)y\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y=|AI|^2\left\{\frac{A_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^2}[(2\psi_4\tan\phi-1)\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}+1]+\frac{B_{\sigma1}(\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}-1)}{2\tan\phi}\right\} \tag{21}$$

$$S_{\sigma A}=\frac{\dfrac{A_{\sigma1}D_{\sigma1}\psi_4^2\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}}{2\tan\phi}+[(2\psi_4\tan\phi-1)\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}+1]\left[\dfrac{(A_{\sigma1}C_{\sigma1}+B_{\sigma1}D_{\sigma1})}{(2\tan\phi)^2}-\dfrac{2A_{\sigma1}D_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^3}\right]+\dfrac{B_{\sigma1}C_{\sigma1}(\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}-1)}{2\tan\phi}}{\dfrac{A_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^2}[(2\psi_4\tan\phi-1)\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}+1]+\dfrac{B_{\sigma1}(\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}-1)}{2\tan\phi}} \tag{22}$$

$$\beta_{\sigma AI}=\frac{\dfrac{A_{\sigma1}\psi_4^2\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}}{2\tan\phi}+\left[\dfrac{B_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^2}-\dfrac{2A_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^3}\right][(2\psi_4\tan\phi-1)\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}+1]}{\dfrac{A_{\sigma1}}{(2\tan\phi)^2}[(2\psi_4\tan\phi-1)\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}+1]+\dfrac{B_{\sigma1}(\mathrm{e}^{2\psi_4\tan\phi}-1)}{2\tan\phi}} \tag{23}$$

$$A_{\sigma1}=-K_1\gamma|NK|\cos\psi_1/(3\psi_4) \tag{24}$$

$$B_{\sigma1}=K_1\gamma[(H-h)/2+|NK|\cos\psi_1/3]+\lambda_1 c/2 \tag{25}$$

$$C_{\sigma1}=\frac{K_1\gamma[4(H-h)+|NK|\cos\psi_1]+4\lambda_1 c}{K_1\gamma[6(H-h)+2|NK|\cos\psi_1]+6\lambda_1 c}\times\sqrt{|NN|^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2} \tag{26}$$

$$D_{\sigma1}=\frac{2}{3\psi_4}\sqrt{|NN'|^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}-\frac{C_{\sigma1}}{\psi_4} \quad (27)$$

根据矢量 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 在 xOz 平面的投影长度以及 N 点到矢量 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 在 xOz 平面投影直线的距离，可计算出 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$ 对直线 AD 的力矩 $M_{F1\sigma}$ 为

$$M_{F_{\sigma1}}=\frac{\boldsymbol{F}_{\sigma1}\sin\phi_1}{\sqrt{1+\eta_1^2}|AI|e^{\beta_{\sigma AI}\tan\phi}}S_{\sigma A}\times \left\{\eta_1\left[\left(|NN'|-|NK|\sin\psi_1\right)\frac{\beta_{\sigma AI}}{\psi_4}+|NK|\sin\psi_1\right]-|NK|\cos\psi_1\left(\frac{\beta_{\sigma AI}}{\psi_4}-1\right)\right\} \quad (28)$$

$\boldsymbol{F}_{1\tau}$、$S_{\tau A}$、$\beta_{\tau AI}$ 对应于 $\boldsymbol{F}_{1\sigma}$、$L_{\sigma A}$、$\beta_{\tau\sigma1}$ 具有相同的型式，只需将系数 $A_{\sigma1}$、$B_{\sigma1}$、$C_{\sigma1}$、$D_{\sigma1}$ 分别替换成 $A_{\tau1}$、$B_{\tau1}$、$C_{\tau1}$、$D_{\tau1}$ 即可。

$$A_{\tau1}=A_{\sigma1}=-K_1\gamma|NK|\cos\psi_1\tan\phi/(3\psi_4) \quad (29)$$

$$B_{\tau1}=K_1\gamma[(H-h)/2+|NK|\cos\psi_1/3]\tan\phi+(\lambda_1\tan\phi+1)c/2 \quad (30)$$

$$C_{\tau1}=\sqrt{|NN|^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}\times\frac{K_1\gamma\tan\phi[4(H-h)+|NK|\cos\psi_1]+4(\lambda_1\tan\phi+1)c}{K_1\gamma\tan\phi[6(H-h)+2|NK|\cos\psi_1]+6(\lambda_1\tan\phi+1)c} \quad (31)$$

$$D_{\tau1}=\frac{2}{3\psi_4}\sqrt{|NN'|^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}-\frac{C_{\tau1}}{\psi_4} \quad (32)$$

合力矢量 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$ 与 xOz 平面的夹角 δ_1 计算如下。

$$\sin\delta_1=\frac{\kappa_1}{\sqrt{1+\kappa_1^2+\mu_1^2}} \quad (33)$$

$$\mu_1=\frac{(2|NN'|-m_1h)|NK|\cos\psi_1}{m_1h(|NN'|-|NK|\sin\psi_1)-2n_1|NN'||NK|\cos\psi_1} \quad (34)$$

$$\kappa_1=\frac{n_1h|NK|\cos\psi_1-h(|NN'|-|NK|\sin\psi_1)}{m_1h(|NN'|-|NK|\sin\psi_1)-2n_1|NN'||NK|\cos\psi_1} \quad (35)$$

式中，μ_1、κ_1 为合力矢量 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$ 在 y 和 z 方向的坐标值，其中 m_1、n_1 的计算式为

$$m_1=\frac{-h/2}{(|NN'|-|NK|\sin\psi_1)\beta_{\tau AI}/\psi_4+|NK|\sin\psi_1} \quad (36)$$

$$n_1=\frac{|NK|\cos\psi_1(1-\beta_{\tau AI}/\psi_4)}{(|NN'|-|NK|\sin\psi_1)\beta_{\tau AI}/\psi_4+|NK|\sin\psi_1} \quad (37)$$

根据矢量 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$ 在 xOz 平面的投影长度，以及 N 点到矢量 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$ 在 xOz 平面投影直线的距离，可计算出 $\boldsymbol{F}_{1\tau}$ 对直线 AD 的力矩 $M_{F1\tau}$ 为

$$M_{F_{\tau1}}=\frac{\boldsymbol{F}_{\tau1}\cos(\arcsin\delta_1)S_{\tau A}}{\sqrt{1+\mu_1^2}}|AI|e^{\beta_{\tau AI}\tan\phi}\times \left\{\mu_1\left[\left(|NN'|-|NK|\sin\psi_1\right)\frac{\beta_{\tau AI}}{\psi_4}+|NK|\sin\psi_1\right]-|NK|\cos\psi_1\left(1-\frac{\beta_{\tau AI}}{\psi_4}\right)\right\} \quad (38)$$

经判断，$M_{F1\sigma}$ 和 $M_{F1\tau}$ 的方向均为顺时针方向。曲边体 $ADIJPL$ 对 AD 线力矩平衡方程为

$$M_{Q_{1\sigma}}-M_{W_1}-M_q-M_{c1}-2M_{F_{\tau1}}-2M_{F_{\sigma1}}=0 \quad (39)$$

则有

$$\boldsymbol{Q}_{1\sigma}=\boldsymbol{Q}_{1\sigma'}=\frac{M_{W_1}+M_q+M_{c1}+2M_{F_{\tau1}}+2M_{F_{\sigma1}}}{L_{Q_{1\sigma}}} \quad (40)$$

2.2 $\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$ 推导

$BCIJSU$ 滑块受力分析如图 10 所示，共受到 10 个力的作用，分别为：自身重力 $\boldsymbol{W}_3$；来自四棱楔形体土核 $BCIJ$ 面上与 $\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{2\tau}$ 分别对应的反作用力 $\boldsymbol{Q}_{2\sigma'}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{2\tau'}$；$BCSU$ 面上作用的分布土压力 $K\gamma z$，K 为该斜面上的土压力系数；BIS 面上作用的正应力合力 $\boldsymbol{F}_{3\sigma}$ 和切应力合力 $\boldsymbol{F}_{3\tau}$，CJU 面相应的 $\boldsymbol{F}_{4\sigma}$ 和 $\boldsymbol{F}_{4\tau}$，且根据模型特征，大小上有 $\boldsymbol{F}_{3\sigma}=\boldsymbol{F}_{4\sigma}$、$\boldsymbol{F}_{3\tau}=\boldsymbol{F}_{4\tau}$；$IJSU$ 面上的法向应力和切向相应摩擦应力的合力 $\boldsymbol{F}_{R2}$、黏聚力合力 $\boldsymbol{F}_{c2}$。

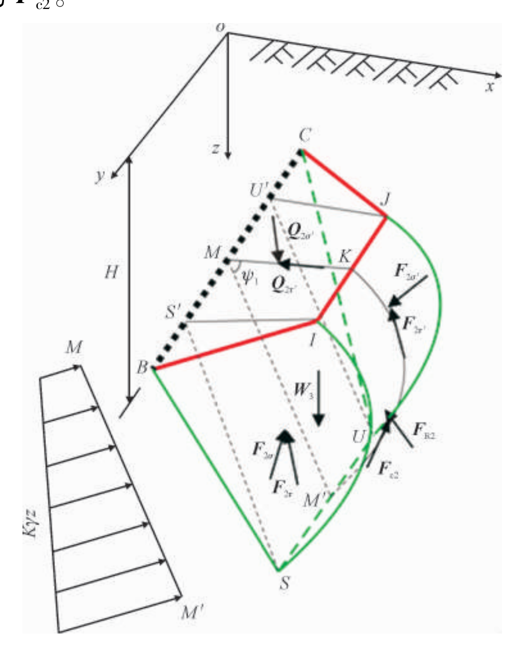


图 10　$BCIJSU$ 滑块受力分析

Fig. 10　Force analysis of $BCIJSU$

$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$推导过程与$\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$相似，不再赘述，直接给出$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$的推导结果为

$$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}=\boldsymbol{Q}_{2\sigma'}=\frac{M_E+M_{c2}+2M_{F_{\tau 2}}-M_{W_2}-2M_{F_{\sigma 2}}}{L_{Q_{2\sigma}}} \quad (41)$$

式中：M_E为分布荷载在$BCSU$面上产生的逆时针力矩；M_{c2}为黏聚力合力$\boldsymbol{F}_{c2}$产生的顺时针力矩；$\boldsymbol{F}_{Q2\sigma}$为法向应力合力$\boldsymbol{Q}_{2\sigma'}$对直线$BC$的力臂。

2.3 Q_3推导

滑动体$ABIXV$和$CDJYZ$形状会随着ψ_1、ψ_2的角度变化而改变。$\boldsymbol{Q}_{Ep}$和$\boldsymbol{Q}_c$贡献的锚板水平承载力记为$\boldsymbol{Q}_3$，其计算可参考太沙基地基极限承载力理论并考虑矩形基础的修正，土体自重因与承载力方向垂直，故不应计入其影响。

$$\boldsymbol{Q}_3=\left[q_0N_q+\left(1+\frac{h}{5l}\right)cN_c\right]h^2 \quad (42)$$

$$N_c=\frac{\cos(\zeta-\phi)\left[e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\phi-2\zeta\right)\tan\phi}(1+\sin\phi)-1\right]}{\cos\zeta\sin\phi}+\tan\zeta \quad (43)$$

$$N_q=\frac{\cos(\zeta-\phi)}{\cos\zeta}e^{(3\pi/2+\phi-2\zeta)\tan\phi}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \quad (44)$$

其中，q_0为ABV面和CDZ面上的平均静止土压力，且

$$q_0=K_0\gamma h' \quad (45)$$

$$h'=\left[\tan\psi_2\left(H-h+\frac{2|NK|\cos\psi_1}{3\tan\psi_1}\right)+\tan\psi_1\times\left(H-\frac{|NK|\cos\psi_1}{3\tan\psi_2}\right)\right]/(\tan\psi_1+\tan\psi_2) \quad (46)$$

2.4 极限平衡条件

四棱楔形体$ABCDIJ$竖向受力平衡方程为

$$(cS_{ADIJ}+Q_{1\sigma}\tan\phi)\cos\psi_1+Q_{2\sigma}\sin\psi_2-W_2-(cS_{BCIJ}+Q_{2\sigma}\tan\phi)\cos\psi_2-Q_{1\sigma}\sin\psi_1=0 \quad (47)$$

$$S_{ADIJ}=(l-h/2)|NK| \quad (48)$$

$$S_{ADIJ}=(l-h/2)|NK| \quad (49)$$

$$S_{BCIJ}=(l-h/2)|MK| \quad (50)$$

$$W_2=\gamma lh|NK|\sin\psi_1/3 \quad (51)$$

式中：S_{ADIJ}、S_{BCIJ}分别为平面$ADIJ$和$BCIJ$的面积。

将推求的各量表达式代入式(47)并结合式(1)即可求解ψ_1、ψ_2，可采用Excel表格中的假设分析进行，进而可计算$\boldsymbol{Q}_{1\sigma}$、$\boldsymbol{Q}_{2\sigma}$。至此，将上述求得的各量代入式(3)可得竖向矩形锚板水平拉拔极限承载力三维统一计算方法表达式为

$$T_u=(cS_{ADIJ}+Q_{1\sigma}\tan\phi)\sin\psi_1+Q_{1\sigma}\cos\psi_1+(cS_{BCIJ}+Q_{2\sigma}\tan\phi)\sin\psi_2+Q_{2\sigma}\cos\psi_2+Q_3 \quad (52)$$

3 对比验证

当$l=h$，即对于正方形锚板，模型中LP线段长度为0，则本研究所构建模型及承载力计算式可退化到文献[7]中形式。为验证本研究所推导的竖向矩形锚板水平拉拔极限承载统一理论解的合理性，共收集了国内外6位学者的大尺寸矩形(包括正方形)锚板现场和室内拉拔试验数据共30个，但矩形板大尺寸模型试验数据文献报道偏少。锚板尺寸最长1.524 m，最小0.15 m；土样包含砂土和黏性土，PWRC和Dickin试验中力学参数采用CD指标，其余试验中均为CU指标，黏聚力范围0～26.5 kPa，内摩擦角变化范围22.6°～36°；埋置深度从2～4.9 m不等，埋深比变化范围涵盖了浅埋和深埋，最小埋深为2，最大埋深为13.3，具体如表1所示。现采用《铁路路基支挡结构设计规范(TB 10025－2006)》计算方法[10]、日本公共工程研究中心(PWRC)方法[11]、Miyata修正法[12]以及本研究推导的极限承载力统一理论解法对表1中锚板的极限承载力进行计算，并与试验值进行对比，结果如图11所示。

《铁路路基支挡结构设计规范》[10]方法是基于现场数据总结而来的经验法，从图11(a)中可以看出该方法较为保守，除一组数据符合较好外，其余工况计算结果均低于实测值，两者比值F_s基本分布在1:2附近。从图11(b)可以看出，与规范法相比，日本公共工程研究中心(PWRC)方法对Dickin的试验锚板计算结果偏小严重，该锚板尺寸为0.15 m，在表中最小；而对于表中最大尺寸的锚板，计算值则达到实测值的5倍。这说明PWRC方法计算结果受锚板尺寸效应影响较为严重。2011年，Miyata基于大量试验数据提出了对PWRC方法的修正，从图11(c)可以看出修正并不理想，其结果低估了锚板的极限承载力。对于砂土中的锚板，计算值仅有实测值的10%左右。造成修正失败的原因很可能是其采用的数据均为室内模型试验数据，锚板尺寸绝大部分小于5 cm；而本次收集的锚板尺寸最小为0.15 m。这也说明锚板的极限承载力具有很强的尺寸效应，基于室内模型试验所得数据用于指导工程实践，可能是不可靠的。从图11(d)可以看出，本研究所推导

的统一计算方法与其他方法相比不具备明显的倾向性，且计算结果与实测值比值的变化范围较窄，靠近于1∶1线，总体表现为4种方法中最好的。对4种方法计算比值 F_s 进行偏差统计，平均值分别为0.355、2.270、0.545和1.057；变异系数COV分别为0.531、0.466、0.375和0.102。本研究所推导极限承载力统一计算方法在精度上优于其他方法，相比于日本公共工程研究中心方法提高30%以上；在离散程度上较之其他方法也有明显下降。这也更进一步验证了本研究方法的可行性。

表1　矩形锚板大尺寸试验数据

Tab. 1　Summary of large-size anchor-plate pullout tests

序号	土体类型	ϕ/(°)	c/kPa	γ/(kN·m^{-3})	板长 l/m	板宽 b/m	埋深 h/m	极限承载力 T_u/kN	数据来源
1	黏土	29.5	19.60	19.70	0.500	0.500	2.000	333.200	文献[5]
2	黏土	29.5	19.60	19.70	0.500	0.500	4.000	321.400	文献[5]
3	黏土	9.5	20.60	19.70	0.750	0.750	2.000	364.600	文献[5]
4	黏土	29.0	26.05	18.70	0.600	0.600	3.000	305.800	文献[5]
5	黏土	26.5	19.60	16.70	0.500	0.500	3.000	235.000	文献[5]
6	黏土	26.5	19.60	16.70	0.750	0.750	3.000	368.500	文献[5]
7	黏土	26.5	19.60	19.40	0.800	0.800	3.3000	520.000	文献[5]
8	黏土	29.5	20.00	20.10	0.500	0.500	2.000	340.000	文献[13]
9	黏土	29.5	20.00	20.10	0.750	0.750	2.000	372.000	文献[13]
10	黏土	29.5	20.00	20.10	1.000	1.000	2.000	560.000	文献[13]
11	黏土	26.5	20.00	17.00	0.750	0.7500	3.000	376.000	文献[13]
12	黏土	26.5	20.00	17.00	1.000	1.000	3.000	520.000	文献[13]
13	黏土	29.0	23.00	19.100	0.600	0.600	3.000	312.000	文献[13]
14	黏土	22.6	23.00	19.80	1.000	1.000	4.900	515.000	文献[13]
15	黏土	26.5	20.00	19.80	1.000	1.000	2.3.00	376.000	文献[13]
16	黏土	26.5	20.00	19.80	1.000	1.000	3.300	432.000	文献[13]
17	黏土	32.0	8.96	15.70	0.762	0.610	1.829	222.400	文献[14]
18	黏土	32.0	8.96	15.70	0.762	0.610	2.438	355.840	文献[14]
19	黏土	32.0	8.96	15.70	0.914	0.914	2.286	711.680	文献[14]
20	黏土	32.0	8.96	15.70	1.143	0.914	1.676	346.940	文献[14]
21	黏土	32.0	8.96	15.70	1.143	0.914	2.286	564.900	文献[14]
22	黏土	32.0	8.96	15.70	1.524	1.219	1.219	311.360	文献[14]
23	砂土	36.0	0	16.00	0.300	0.300	2.000	103.000	文献[11]
24	砂土	36.0	0	16.00	0.300	0.300	2.000	111.800	文献[11]
25	细砂	30.0	2.00	15.40	0.300	0.300	2.000	60.800	文献[12]
26	细砂	30.0	2.00	15.40	0.300	0.300	2.000	83.800	文献[12]
27	细砂	30.0	2.00	15.40	0.300	0.300	2.000	89.400	文献[12]
28	砂土	33.0	0	16.38	0.150	0.150	0.450	8.091	文献[15]
29	砂土	33.0	0	16.38	0.150	0.150	0.720	17.334	文献[15]
30	砂土	33.0	0	16.38	0.150	0.150	0.975	33.862	文献[15]

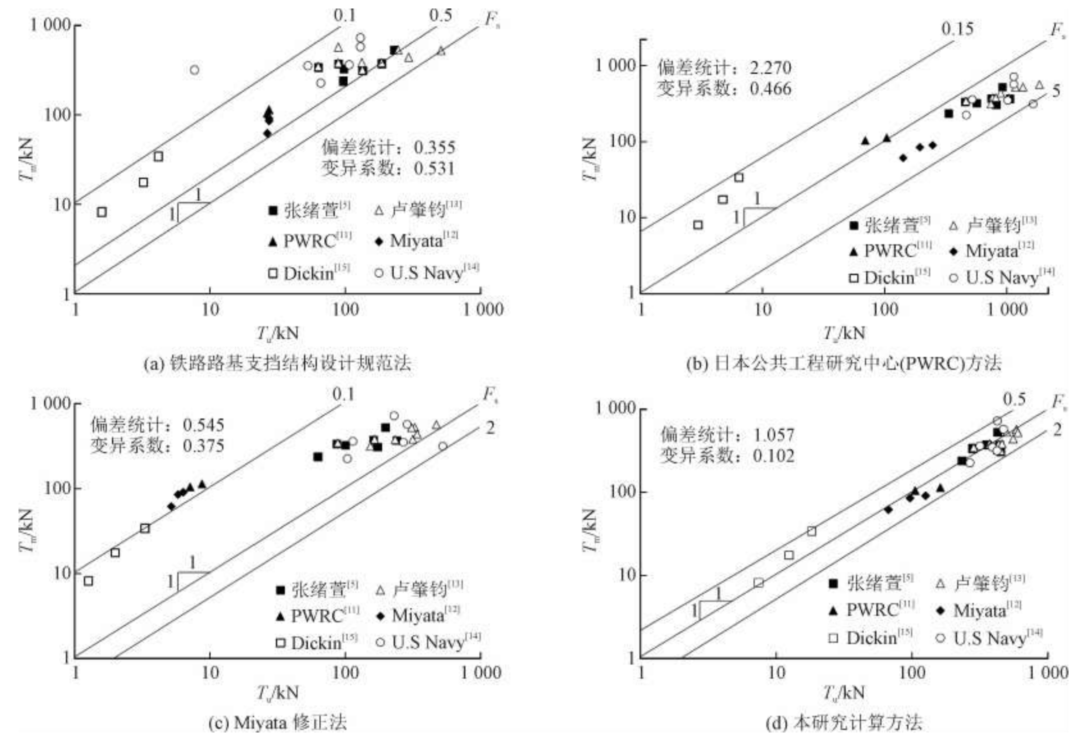


图 11　不同方法计算结果对比

Fig. 11　Comparison of calculated results by different methods

4　结　论

本研究在条形板、正方形板统一力学模型的基础上，构建了矩形锚板水平极限拉拔的三维力学模型，基于极限平衡条件推导了极限承载力统一计算方法。通过对大尺寸锚板试验的计算和与其他计算方法对比，主要得出以下结论。

1）竖向矩形锚板在水平极限拉拔下所形成的破坏面可通过板前四棱楔形体土核挤压土体所形成的空间滑移体来描述，由此构建的力学模型可实现对不同埋深比下破坏机制连续变化的动态反映，无需再人为区分浅埋和深埋。

2）与大尺寸试验数据以及 3 种其他方法的计算对比表明：本研究方法对锚板尺寸效应不敏感，对不同埋深无明显的倾向性；与实测值比值的变化范围较窄，接近靠近于 1∶1 线；计算精度和离散程度的指标表现均优于其他 3 种方法。总体而言，本研究方法是 4 种方法中表现最好的。

3）虽然本研究方法在与文中所收集试验数据点的对比中取得了较好效果，但由于大尺寸矩形锚板的拉拔试验开展较少，表 1 中数据点有限，尚不具备足够的代表性。故对应于文中土性指标的工况，本研究方法可供借鉴使用，但其适用范围有待进一步检验。

参考文献

［1］ 何立志，袁腾方，王旭. 两层锚定板的悬锚式挡土墙墙身稳定性验算分析［J］. 公路工程，2012，37（5）：47-48.
HE Lizhi，YUAN Tengfang，WANG Xu. Wall stability checking analysis on the suspended-anchor earth retaining wall of two anchor plate［J］. Highway engineering，2012，37（5）：47-48（in Chinese）.

［2］ 张发春. 一种新型高大锚定板挡土墙的设计与施工［J］. 中外公路，2008，28（5）：45-50.
ZHANG Fachun. Design and construction of a new type of retaining wall with high anchor plate［J］. Journal of China & foreign highway，2008，28（5）：45-50（in Chinese）.

［3］ 丁佩民，肖志斌，张其林，等. 砂土中锚板抗拔承载力研究［J］. 建筑结构学报，2003，24（5）：82-91.
DING Peimin，XIAO Zhibin，ZHANG Qilin，et al. Uplift capacity of anchor plates in sand［J］. Journal of building structures，2003，24（5）：82-91（in Chinese）.

［4］ 张续萱，吴肖茗. 新型支挡-锚板挡土结构的理论与实践［M］. 北京：中国铁道出版社，1996.

［5］ 朱碧堂，杨敏，郭蔚东. 竖向浅埋锚锭板的侧向极限拉拔荷载［J］. 岩土工程学报，2006，28（10）：1236-1241.
ZHU Bitang，YANG Min，GUO Weidong. Pullout capacity of vertically-burried shallow anchor plates［J］. Chinese journal of geotechnical engineering，2006，28（10）：1236-1241（in Chinese）.

[6] 中交第一航务工程勘察设计院有限公司. 板桩码头设计与施工规范:JTS 167 - 3 - 2009[S]. 北京:人民交通出版社,2009.

[7] 胡伟,高文华,赵璞,等. 竖向正方形锚板水平拉拔极限承载力三维统一理论解研究[J]. 岩土工程学报,2019,41(1):111-120.
HU Wei,GAO Wenhua,ZHAO Pu,et al. Research on the three-dimensional unified theoretical solution of the horizontal pull-out ultimate bearing capacity of vertical square anchor plates[J]. Chinese journal of geotechnical engineering,2019,41(1):111-120(in Chinese).

[8] 胡伟,刘顺凯,邹贵华,等. 竖向条形锚定板水平拉拔极限承载力统一理论解研究[J]. 岩土工程学报,2018,40(2):296-304.
HU Wei,LIU Shunkai,ZOU Guihua,et al. Research on unified theoretical solution of horizontal pull-out ultimate bearing capacity of vertical strip-shaped anchor plates[J]. Chinese journal of geotechnical engineering,2018,40(2):296-304(in Chinese).

[9] 郑帅群,周海祚,郑刚. 圆形及矩形基础非均质地基极限承载力数值分析[J]. 铁道标准设计,2016,60(6):106-112.
ZHENG Shuaiqun,ZHOU Haizuo,ZHENG Gang. Numerical analysis of ultimate bearing capacity of non-homogeneous foundations for circular and rectangular foundations[J]. Railway standard design,2016,60(6):106-112(in Chinese).

[10] 铁道部第二勘察设计院. 铁路路基支挡结构设计规范:TB 10025—2006[S]. 北京:中国铁道出版社,2006.

[11] PWRC. Technical report on rational design method of reinforced soil walls[M]. Tsukuba,Ibaraki:Public Works Research Center,2010:278.

[12] MIYATA Y,BATHURST R J,KONAMI T. Evaluation of two anchor plate capacity models for MAW systems[J]. Soils and foundations,2011,51(5):885-895.

[13] 卢肇钧. 锚定板挡土结构[M]. 北京:中国铁道出版社,1989.

[14] OVESEN K N,STR∅MANN H. Design method for vertical anchor slabs in sand[C]//Proceeding of Specialty Conference on Performance of Earth at Earth Supported Structures. New York:ASCE,1972:1481-1500.

[15] DICKIN E A,LEUNG C F. Centrifugal model tests on vertical anchor plates[J]. Journal of geotechnical engineering,1983,109(12):1503-1525.

(编辑 黄崇亚)